UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS IV (MA-2115)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

6 de marzo de 2017

Criterios de Convergencia, Conjunto y Radio de Convergencia, Serie de Maclaurin, EDO de Bernoulli

Resolución Segundo Parcial 2015 Abril-Julio Tipo B

1. Decidir si las siguientes series numéricas convergen o divergen

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2} \qquad b)\ \sum_{0}^{\infty} ne^{-n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

a) Una observación importante antes de intentar aplicar los criterios de convergencia es que la función $\arctan(n)$ está acotada. En particular, $-\pi/2 < \arctan(n) < \pi/2$, y para $n > 0$, $0 < \arctan(n) < \pi/2$. Utilizando este hecho, se vuelve sencillo decidir la convergencia de la serie, puesto que

$$\frac{\arctan(n)}{1+n^2} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+n^2} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}.$$

Entonces, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{1+n^2} < \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

y por ende, la conocida convergencia de

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

implica la convergencia de la serie, según el criterio de comparación.

b) Para decidir si la serie converge basta con utilizar el criterio del cociente directamente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{-n-1}}{ne^{-n}} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{e}.$$

Puesto que $e^{-1} < 1$, entonces el límite implica la convergencia de la serie, según el criterio del cociente.

c) Al igual que en la primera serie, el análisis se simplifica de forma considerable si uno es capaz de resistir la tentación de aplicar los criterios indiscriminadamente. Naturalmente, una forma de simplificar la serie sería simplificar la expresión. En efecto, notemos que

$$(2n)! = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots(2\cdot n) = 2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = 2^n n!$$

Por ende,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Esta es una serie geométrica de convergencia conocida. Por tanto, la serie converge.

2. Hallar el conjunto de convergencia y determinar el radio de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-1)^n}{n5^n}.$$

Primero veamos que la serie de potencias está expandida alrededor de $x = 1/3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-1)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n5^n} \left(x - \frac{1}{3}\right)^n.$$

Tomando el límite del criterio de la raíz, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} = \left| \frac{(-1)^n 3^n}{n5^n} \left(x - \frac{1}{3}\right)^n \right|^{1/n} = \frac{3}{5} \left| x - \frac{1}{3} \right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}}.$$

Pero como

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

entonces

$$\frac{3}{5} \left| x - \frac{1}{3} \right| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{3}{5} \left| x - \frac{1}{3} \right|,$$

y, de acuerdo al criterio de la raíz, basta con tomar

$$\frac{3}{5} \left| x - \frac{1}{3} \right| < 1$$

tal que la serie sea absolutamente cconvergente. Es decir,

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{5}{3}.$$

Esto implica que su radio de convergencia debe ser $R = 5/3$. Para determinar el conjunto de convergencia solo fálta decidir si la serie converge en $|x - 1/3| = 5/3$. Consideremos entonces la serie para $(x - 1/3) = 5/3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n5^n} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

De inmediato reconocemos esta serie como la serie armnónica alternada, de conocida convergencia. Por tanto, la serie converge para $(x - 1/3) = 5/3$. Para el caso $(x - 1/3) = -5/3$, vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n5^n} \left(-\frac{5}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

La serie resultante es la serie armónica, de conocida divergencia. Por ende, la serie no converge para $(x - 1/3) = -5/3$. Finalmente, el conjunto de convergencia para la serie de potencias es $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -5/3 < x - 1/3 \leq 5/3\}$, y su radio de convergencia es $R = 5/3$.

3. Hallar el desarrollo en serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Observemos primero que el denominador puede factorizarse como $(x-1)(x-2) = (1-x)(2-x)$. En su forma factorizada,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)},$$

la expresión parece sugerir que pueden separarse los factores del denominador en fracciones simples y luego acomodar los fracciones para transformarlos en las sumas de una serie geométrica. En efecto

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}.$$

La fracción de la izquierda es precisamente

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Mientras que la fracción de la derecha puede reescribirse como

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad |x| < 2.$$

Puesto que estas fracciones pueden ser expresadas como series de potencias alrededor de $x = 0$, en virtud de la unicidad de la expansión de Taylor, entonces estas series de potencias son sus series de Maclaurin respectivas. Por tanto,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad |x| < 1$$

es la serie de Maclaurin de $f(x)$, donde se tomó $|x| < 1$ puesto que es necesario que ambas series converjan tal que su suma sea convergente.

4. Resolver el problema a valores iniciales $x^2y' - 2xy = 3y^4$, $y(1) = 1/2$.

Podemos reconocer la ecuación diferencial como una ecuación diferencial de Bernoulli. Si reescribimos la expresión como

$$x^2y^{-4}y' - 2xy^{-3} = 3 \qquad \text{y luego} \qquad -3x^2y^{-4}y' + 6xy^{-3} = -9,$$

podemos aplicar la sustitución estándar de las ecuaciones diferenciales de Bernoulli. Sea $u = y^{-3}$, $u' = -3y^{-4}y'$. Obtenemos

$$x^2u' + 6xu = -9.$$

Esta ecuación no es separable, ni homogénea. Sin embargo, si redujésemos el orden de las x por uno, podríamos separar variables e integrar. Tomemos entonces el cambio de variable $v = xu$. Lo importante de este cambio de variable es que

$$v' = u + xu' \implies v' - u = xu' \implies xv' - xu = xv' - v = x^2u',$$

y por ende, bajo el cambio de variable, la expresión resulta

$$(xv' - v) + 6v = -9, \qquad xv' + 5v = -9.$$

Esta última expresión sí es separable. Despejando los términos en x y v, se obtiene

$$-\frac{1}{9+5v}dv = \frac{1}{x}dx.$$

Integrando,

$$-\frac{1}{5}\ln(9+5v)+C=\ln(x), \quad x>0,$$

donde C es una constante de integración arbitraria. Exponenciando la expresión a ambos lados,

$$C(9+5v)^{-1/5}=x \implies C(9+5v)^{-1}=x^5$$

y entonces la solución general de la ecuación diferencial puede expresarse de forma implícita mediante

$$C=x^5(9+5xy^{-3}).$$

Para resolver ahora el problema de valor inicial, basta con incluír la condición $y(1)=1/2$ para hallar C.

$$C=(1)^5\,(9+5\cdot 1\cdot 8)=49.$$

Finalmente,

$$49=x^5(9+5xy^{-3})$$

es la solución de la ecuación diferencial.

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del segundo parcial de Abril-Julio del 2015 (tipo B), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com